OPCIÓN A

1. *(3 puntos)* Considere el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+mz=m \\ mx+(m-1)y+z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

a) ***(1 punto)*** Determine los valores del parámetro ***m*** para los que ese sistema de ecuaciones es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible

b) *(*1 *punto)* Encuentre las soluciones de ese sistema cuando ***m* = 1**.

c) *(*1 *punto)* Considere las matrices: $C=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ Determine el rango de la matriz producto ***CD***.

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1-m & 1-m^2 \\ 0 & 0 & 1-m \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1-m^2 \\ 0 & 1-m \end{vmatrix}=-(1-m)=m-1 \Rightarrow |A|=m-1 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow$$

$m-1=0 \Rightarrow m=1 \Rightarrow$

$\forall m \in \Re-\{1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ rang (A) = 3 = Número de incognitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado

$Si\ m=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rang}(\text{A}) = \text{rang}(\text{A/B}) = 2 < \text{Número de incognitas} \Rightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b)

Si m = 1 $\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -2y=1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow x-1+z=1 \Rightarrow x=2-z \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,y\ ,z)=(2-\lambda\ ,1,\lambda)$$

c)

$$CD=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(\text{CD}) = 1$$

2. *(1,5 puntos)* Determine la ecuación del plano que pasa por el punto **(0 , 0 , 0)** y contiene a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

Para un plano π necesitamos un punto, el O(0,0,0) y dos vectores independientes, el director de la recta **u** y el **OA**, siendo A un punto de la recta.

$$y = 2x - 2 \Rightarrow 3\cdot(2x-2) - 2z + 4 \Rightarrow 6x - 6 - 2z + 4 = 0 \Rightarrow 2z = 6x - 2 \Rightarrow z = 3x - 1 \Rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

Punto A(0,-2,-1), vector director **u** = (1,2,3), otro vector **OA** = (0,-2,-1).

$$\text{Plano } \pi \equiv \det(\overrightarrow{OX}, \vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = x(-2+6) - y(-1-0) + z(-2) = 4x + y - 2z = 0$$

3. *(4 puntos)*

a) Considere la función: $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

a.1.) *(1 punto)* Determine el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$

a.2.) *(1 punto)* Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

a.3.) (1 punto) Determine la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto **x = 2.**

b) *(1 punto)* Calcule: $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1}\, dx$

a.1)

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow Dom(f) = x \in \forall\Re$$

Asíntota vertical $\Rightarrow$ *No existe*

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1+\frac{1}{\infty}}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty^2}}} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0}} = 1 \Rightarrow$$

Existe asíntota horizontal, $y = 1$, *cuando* $x \to +\infty$

$$y = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x+1}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-1+\frac{1}{+\infty}}{\sqrt{1+\frac{1}{(\infty)^2}}} = \frac{-1+0}{\sqrt{1+0}} = -1 \Rightarrow$$

Existe asíntota horizontal, $y = -1$, *cuando* $x \to -\infty$

Continuación del Problema 3 de la opción A

a.1) Continuación

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x\sqrt{x^2+1}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{x\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{\infty\sqrt{1+\frac{1}{\infty^2}}}=$$

$$=\frac{1+0}{\infty\sqrt{1+0}}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow \textit{No existe asíntota oblicua cuando } x\to+\infty$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(-x)}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x+1}{\sqrt{(-x)^2+1}}}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{-x\sqrt{x^2+1}}=\frac{-\infty}{-\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x}{x}+\frac{1}{x}}{-x\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\frac{-1+\frac{1}{\infty}}{(-\infty)\sqrt{1+\frac{1}{(-\infty)^2}}}=\frac{-1+0}{(-\infty)\sqrt{1+0}}=\frac{-1}{-\infty}=0\Rightarrow \textit{No existe asíntota oblicua cuando } x\to-\infty$$

a.2)

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}(x+1)}{x^2+1}=\frac{\frac{(x^2+1)-x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow$$

$$\textit{Crecimiento}\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow=\frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0\Rightarrow\begin{cases}1-x>0\Rightarrow -x>-1\Rightarrow x<1\\ x^2+1>0\Rightarrow x^2>-1\Rightarrow \textit{Sin solución}\Rightarrow\forall x\in\end{cases}$$

$-\infty$ **1** ∞

x < 1	**(+)**	**(-)**
$(x^2+1)\sqrt{x^2+1}>0$	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**

Crecimiento $\forall x\in\Re / x<1$ **Decrecimiento** $\forall x\in\Re / x>1$

Máximo relativo en $x=1\Rightarrow f(1)=\frac{1+1}{\sqrt{1^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ **De crecimiento pasa a decrecimiento**

a.3)

$$\begin{cases} f(2)=\frac{2+1}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\\ m=f'(2)=\frac{1-2}{(2^2+1)\sqrt{2^2+1}}=-\frac{1}{5\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{25}\end{cases}\Rightarrow y-\frac{3\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{5}}{25}(x-2)\Rightarrow 25y-15\sqrt{5}=-\sqrt{5}x+2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{5}x+25y-17\sqrt{5}=0$$

b)

$$\begin{array}{l|l} x^2-3x+3 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2+\ x} & x-2 \\ \quad -2x+3 & \\ \quad\ \ \underline{2x-2} & \\ \qquad\ \ 1 & \end{array}$$

$$\frac{x^2-3x+3}{x-1}=x-2+\frac{1}{x-1} \Rightarrow \int \frac{x^2-3x+3}{x-1}\,dx=\int\left(x-2+\frac{1}{x-1}\right)dx=\int x\,dx-2\int dx+\int\frac{1}{x-1}\,dx=$$

$$x-1=t \Rightarrow dx=dt$$

$$\int \frac{x^2-3x+3}{x-1}\,dx=\frac{1}{2}x^2-2x+\int\frac{1}{t}\,dt=\frac{1}{2}x^2-2x+\ln t=\frac{1}{2}x^2-2x++\ln(x-1)+K$$

4.- *(1,5 puntos)* Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el balonmano y al 30% les gustan ambos deportes.
a) *(*0,75 *puntos)* Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)?
b) *(*0,*7*5 *puntos)* Se eligen 10 alumnos al azar con reemplazamiento, es decir, cada vez que se elige un alumno se le pregunta por sus gustos y se repone a la clase, pudiendo ser elegido nuevamente. Calcule la probabilidad de que solo a 3 les guste el fútbol (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el balonmano y al 30% les gustan ambos deportes.
a)
*(*0,75 *puntos)* Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)?

Sean los sucesos F = ”le gusta el fútbol” y B = “le gusta el balonmano”.
Nos dan p(F) = 80% = 0’8, p(B) = 40% = 0’4, p(ambos deportes) = p(F∩B) = 30% = 0’3

Me están pidiendo **p(alguno de los deportes) = p(F∪B)** = p(F) + p(B) - p(F∩B) = 0’8 + 0’4 - 0’3 **= 0’9.**
b)
*(*0,*7*5 *puntos)* Se eligen 10 alumnos al azar con reemplazamiento, es decir, cada vez que se elige un alumno se le pregunta por sus gustos y se repone a la clase, pudiendo ser elegido nuevamente. Calcule la probabilidad de que solo a 3 les guste el fútbol (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

Recordamos que si realizamos **n** veces (10) un experimento en el que podemos obtener éxito, F, con probabilidad **p** (p(F) = 0’8) y fracaso, F^C, con probabilidad **q** (q = 1 – p = 1 – 0’8 = 0’2), diremos que estamos ante una distribución binomial de parámetros **n** y **p**, y lo representaremos por **B(n;p)**.
Es decir nuestra variable **X sigue una binomial B(n;p)** = **B(10; 0’8)**.

En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que **es su función de probabilidad**, viene dada por:

$$\mathbf{p(X = k) = (10\ sobre\ k).0'8^{k}\cdot 0'2^{(10-k)} = \binom{10}{k}.0'8^{k}\cdot 0'2^{(10-k)}.}$$

****** (n sobre k) = $\binom{n}{k}$ = (n!)/(k!.(n-k)!) con n! el factorial de “n”. En la calculadora “ n tecla **nCr** k “

En nuestro caso piden **p(X = 3) =** $\binom{10}{3}\cdot \mathbf{0'8^{3}\cdot 0'2^{7}} = \frac{10!}{3!\cdot 7!}\cdot \mathbf{0'8^{3}\cdot 0'2^{7}} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot \mathbf{0'8^{3}\cdot 0'2^{7}}$ **= 0’000786432.**

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)* Considere la matriz: $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&0&0\\1&0&3\end{pmatrix}$

a) *(1,5 puntos)* Determine los valores del parámetro ***k*** para los que la matriz **A – kI** tenga inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) *(1,5 puntos)* Encuentre la matriz **X** que verifica que: **(A −3 I) X =2 I** siendo **I** la matriz identidad de orden 3 y ***A*** la matriz que aparece al comienzo del enunciado

a) Una matriz tiene inversa siempre y cuando su determinante no sea nulo

$$A-kI=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&0&0\\1&0&3\end{pmatrix}-k\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&0&0\\1&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k&0&0\\0&k&0\\0&0&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-k&0&1\\0&-k&0\\1&0&3-k\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$|A-kI|=\begin{vmatrix}3-k&0&1\\0&-k&0\\1&0&3-k\end{vmatrix}=-k\cdot\begin{vmatrix}3-k&1\\1&3-k\end{vmatrix}=-k\cdot\left[(3-k)^2-1\right]=-k\cdot\left(9-6k+k^2-1\right)=$$

$$|A-kI|=-k\cdot\left(8-6k+k^2\right)\Rightarrow Si\ |A-kI|=0\Rightarrow k\cdot\left(8-6k+k^2\right)=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}k=0\\6k+k^2-6k+8=0\Rightarrow\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot8=4\Rightarrow k=\dfrac{6\pm\sqrt{4}}{2}\Rightarrow\begin{cases}k=\dfrac{6+2}{2}=4\\k=\dfrac{6-2}{2}=2\end{cases}\end{cases}$$

$$\forall k\in\Re-\{0\,,\,2\,,\,4\}\Rightarrow|A-kI|\neq0\Rightarrow Existe\ (A-kI)^{-1}$$

$b)$

$$(A-3I)\cdot(A-3I)^{-1}X=2I\cdot(A-3I)^{-1}\Rightarrow IX=2\cdot(A-3I)^{-1}\Rightarrow X=2\cdot(A-3I)^{-1}$$

$$|A-kI|=-3\cdot\left(8-6\cdot3+3^2\right)=-3\cdot(8-18+9)=-3\cdot(-1)=3\neq0\Rightarrow(A-3I)^{-1}=\frac{1}{|A-3I|}\cdot adj\left[(A-3I)^t\right]$$

$$A-3I=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&0&0\\1&0&3\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&0&0\\1&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-3&0\\1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow(A-3I)^t=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-3&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$adj\left[(A-3I)^t\right]=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&-1&0\\3&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow(A-3I)^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}0&0&3\\0&-1&0\\3&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-\frac{1}{3}&0\\1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow X=2\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-\frac{1}{3}&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&-\frac{2}{3}&0\\2&0&0\end{pmatrix}$$

2. *(1,5 puntos)* Considere el plano: $\pi: 2ax + y + az = 4$ y la recta: $r: \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -x + y + 2z = -3 \end{cases}$ según los valores de **m**

a) *(0,75puntos)* Determine la posición del plano y la recta según los diferentes valores de *a*.
b) *(0,75 puntos)* Para ***a* = 2,** determine la recta que es perpendicular al plano *π* y pasa por el punto ***P* (0,1,0)**.

a) Una recta y un plano pueden cortarse en un punto, pertenecer la recta al plano o ser paralelos. Si el sistema que se forma con esas tres ecuaciones es compatible determinado, el plano y la recta se cortan en un punto, si son compatible indeterminados tendrán infinitos puntos comunes y la recta está contenida en el plano o, si el sistema es incompatible la recta y el plano son paralelos

$$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ -x+y+2z=-3 \\ 2ax+y+az=4 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2a & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2a-2 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2a-2 & a-1 \end{vmatrix} = -3a+3-2a+2 = -5a$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow -5a+5=0 \Rightarrow -5a=-5 \Rightarrow a=1 \Rightarrow$$

$$\forall a \in \Re - \{1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ se\ cor\tan\ en\ un\ punto$$

$$Si\ a=1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow$$

$$Sistema\ Incompatible \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos$$

b)
(0,75 puntos) Para **a = 2,** determine la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto **P(0, 1, 0)**.

El plano con a = 2 es: $\pi: 4x + y + 2z = 4$. El vector normal al plano es **n** = (4, 1, 2), que es el vector director **u** de la recta perpendicular.

La recta pedida es: $\frac{x-0}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{2} \Rightarrow \frac{x}{4} = y - 1 = \frac{z}{2}$

3. *(4 puntos)*

a) *(2 puntos)* Determine los valores de los parámetros ***a, b*** y ***c*** para que la función:

$$f(x) = a\ (x-1)^3 + bx + c$$

a.1.) Pase por el punto **(1 , 1)**
a.2.) En el punto **(1 , 1)** su tangente tenga de pendiente **2**.
a.3.) En el punto **x = 2** tenga un máximo relativo.

b) *(2 puntos)* Determine el valor del límite: $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x} \right)^{\frac{3x^2-1}{x}}$

$a)$

$$f'(x) = 3a\ (x-1)^2 + b \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \Rightarrow a\ (1-1)^3 + b \cdot 1 + c = 1 \Rightarrow b+c=1 \\ f'(1) = 2 \Rightarrow 3a\ (1-1)^2 + b = 2 \Rightarrow b = 2 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 3a\ (2-1)^2 + b = 0 \Rightarrow 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+c=1 \Rightarrow c=-1 \\ 3a+2=0 \Rightarrow 3a=-2 \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{2}{3}(x-1)^3 + 2x - 1$$

Continuación del Problema 3 de la opción A

b)

$$\text{Sabiendo que}\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{x^2}-3\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}-2\dfrac{x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{1-\dfrac{3}{\infty}+\dfrac{2}{\infty}}{1-\dfrac{2}{\infty}}=\dfrac{1-0+0}{1-0} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-1}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}}=\dfrac{3-\dfrac{1}{\infty}}{\dfrac{1}{\infty}}=\dfrac{3-0}{0}=\infty \end{array}\right.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}=1^{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x-x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x^2-2x}+\frac{2-x}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2-x}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{x^2-2x}{2-x}}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{x^2-2x}{2-x}}\right)^{\frac{x^2-2x}{2-x}}\right]^{\frac{3x^2-1}{x}\cdot\frac{2-x}{x^2-2x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x^2-1)}{x}\cdot\frac{(}{(x}}$$

$$\textit{Como}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-1)}{x}\cdot\frac{(2-x)}{(x^2-2x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-3x^3-2+x}{x^3-2x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{6\dfrac{x^2}{x^3}-3\dfrac{x^3}{x^3}-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{x}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}-2\dfrac{x^2}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{6}{x}-3-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}}=\frac{\dfrac{6}{\infty}-3-\dfrac{2}{\infty}+\dfrac{1}{\infty}}{1-\dfrac{2}{\infty}}=\frac{0-3-0+0}{1-0}=-3\quad(1)$$

$$\textit{De }(1)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x^2-1)}{x}\cdot\frac{(2-x)}{(x^2-2x)}}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$$

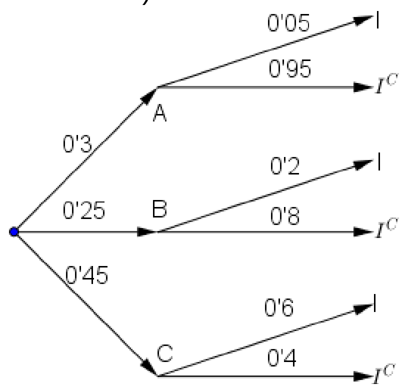
4. *(1,5 puntos)* En una empresa los trabajadores se clasifican en tres categorías: *A, B* y *C*. El 30 % de los trabajadores pertenecen a la categoría A; el 25 % a la categoría B y el resto a la categoría C.
Además, se sabe que de los trabajadores de la categoría A un 5 % habla inglés; mientras que de la categoría *B* un 20 % habla inglés y de los trabajadores de la categoría *C* un 60 % habla inglés.
c) *(*0,75 *puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa, ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés?
d) *(*0,75 *puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa y resulta que SI habla inglés, ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca a la categoría *C*?

En una empresa los trabajadores se clasifican en tres categorías: *A, B* y *C*. El 30 % de los trabajadores pertenecen a la categoría A; el 25 % a la categoría B y el resto a la categoría C.
Además, se sabe que de los trabajadores de la categoría A un 5 % habla inglés; mientras que de la categoría *B* un 20 % habla inglés y de los trabajadores de la categoría *C* un 60 % habla inglés.
c)
*(*0,75 *puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa, ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés?

Llamemos A, B, C, I e I^C, a los sucesos siguientes, “trabajador de categoría A”, "trabajador de categoría B", "trabajador de categoría C", “hablar inglés” y "no hablar inglés”, respectivamente.

Datos del problema p(A) = 30% = 0’3; p(B) = 25% = 0’25; p(I/A) = 5% = 0’051; p(I/B) = 20% = 0’2, p(I/C) = = 60% = 0’6 ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



c)
*(*0,75 *puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa, ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés?

Por el teorema de la Probabilidad Total :

Me piden **p(hablar inglés) = p(I) =** p(A).p(I/A) + p(B).p(I/B) + p(C).p(I/C) =
= (0’3)·(0’05) + (0’25)·(0’2) + (0’45)·(0’6) **= 67/200 = 0’335**.

d)
*(*0,75 *puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa y resulta que SI habla inglés, ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca a la categoría *C*?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

Me piden **p(ser de la categoría C sabiendo que habla inglés) =**

= p(C/I) = $\frac{p(C\cap I)}{p(I)} = \frac{p(C).p(C/I)}{p(I)} = \frac{(0'45)\cdot(0'6)}{0'335}$ **= 54/67 ≅ 0’80597**.